Introduzione all'analisi dei dati sperimentali

Luca Mari, versione 1.10.16

Contenuti

Introduzione

"Gli ingegneri operano con i numeri": questa affermazione ha naturalmente un fondo di verità ma è un po' troppo semplicistica, dato che nasconde almeno due problemi:

- sottintende che esiste una chiara distinzione tra numeri e non-numeri, mentre è ben ovvio che non è sufficiente assegnare simboli numerici a categorie solo qualitative per trasformarle in entità quantitative; volendo per esempio associare un codice a ogni prodotto o servizio elencato in un catalogo, si possono certamente impiegare codici numerici, ma tali codici dovrebbero essere trattati come numeri solo con cautela: è poco plausibile che se c_i, c_j e c_k sono i codici attribuiti a tre oggetti del catalogo e $c_i + c_j = c_k$ allora c_k sia l'"oggetto somma" degli oggetti c_i e c_j (il concetto stesso di "oggetto somma" non è ben chiaro...);
- non mette in evidenza che esiste una distinzione tra numeri "scelti da progetto" (per esempio relativi alla decisione di produrre n_i oggetti di codice c_i) e numeri ottenuti sperimentalmente (per esempio relativi all'accertamento che sono stati prodotti m_i oggetti di codice c_i), e che entrambi, in un qualche senso, non sono semplicemente "i numeri della matematica", perché entrambi implicano un impegno verso il mondo empirico.

Nel corso della storia, gli esseri umani hanno imparato a *descrivere* le entità del mondo che li circonda (oggetti, fenomeni, eventi, processi, …) mediante espressioni linguistiche (per esempio: "questo tavolo è molto lungo"), che a volte contengono riferimenti a numeri (per esempio "questo tavolo è lungo 2 metri"), e a usare queste descrizioni per *prendere decisioni* a proposito delle entità descritte (per esempio: "dato che questo tavolo è molto lungo, per farlo uscire dalla porta lo devo inclinare"). Allo scopo di rendere le descrizioni:

- *oggettive*, cioè relative solo all'oggetto descritto, e non anche al giudizio che ne dà colui che descrive,
- *intersoggettive*, cioè interpretabili nello stesso modo da soggetti diversi,

tipicamente si acquisisce l'informazione che diventerà poi il contenuto della descrizione attraverso un processo di *misurazione*, un'operazione finalizzata *ad acquisire informazione descrittiva relativa a proprietà di oggetti*:

- proprietà fisiche (per esempio lunghezze, masse, temperature, potenze, …);

- proprietà non fisiche (per esempio qualità di prodotti, soddisfazione di clienti, attitudine a svolgere un certo compito, …).

In questo caso, le descrizioni hanno una struttura a tre componenti:

<oggetto, proprietà, valore>

Per esempio, la descrizione "questo tavolo è lungo 2 metri" corrisponde a:

<questo tavolo, lunghezza, 2 metri>

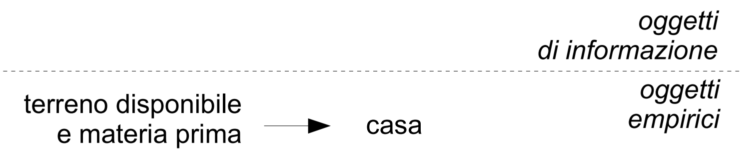
che in forma matematica si scrive abitualmente:

lunghezza(questo tavolo) = 2 m

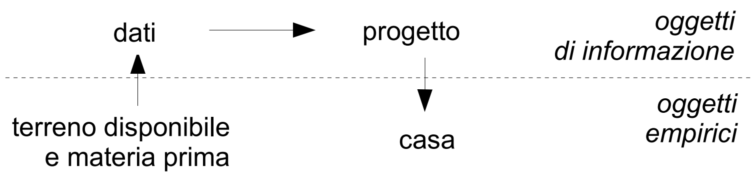
L'oggettività e l'intersoggettività delle descrizioni sono condizioni importanti per la scienza e la tecnologia, e quindi per l'ingegneria.

Oggetti empirici e oggetti di informazione

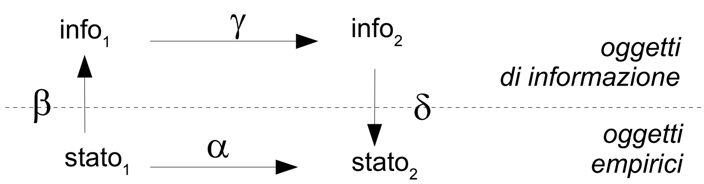
Senza addentrarci in complesse questioni filosofiche, ammettiamo che esistano *oggetti empirici*, come questo tavolo, e *oggetti di informazione*, come la descrizione "questo tavolo è lungo 2 metri".
Si può interagire con gli oggetti empirici in modo interamente sperimentale, intervenendo sul loro stato e il loro comportamento e quindi operando per modificarne lo stato. Per esempio, almeno in linea di principio si potrebbe costruire una casa senza svolgere alcuna attività informazionale:



Questa situazione richiede la presenza di buoni artigiani, non di ingegneri.
Ma in molte situazioni si adotta (anche nel senso di: si è imparato, evolutivamente, ad adottare) una strategia di intervento più complessa: *prima si acquisiscono ed elaborano dati, e quindi li si applica nella costruzione della casa*:



Questa è la situazione in cui si trovano a operare gli ingegneri.
Lo schema più generale del diagramma precedente è:



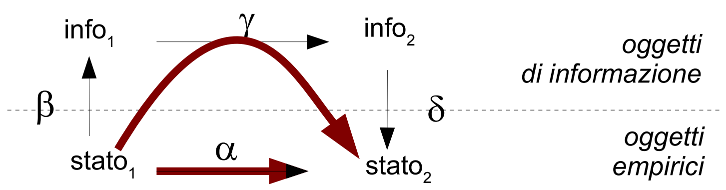
- α: trasformazioni da materia/energia a materia/energia;
- β: trasformazioni da materia/energia a informazione (misurazione, acquisizione dati, sensing, valutazione, decodifica, lettura, …);
- γ: trasformazioni da informazione a informazione (analisi, elaborazione, trasmissione, …);
- δ: trasformazioni da informazione a materia/energia (attuazione, codifica, scrittura, …).

Nota:

- *sensori*: trasduttori di input, impiegati per acquisire informazione dal mondo fisico;
- *attuatori*: trasduttori di output, impiegati modificare il mondo fisico a partire da informazione.

Strategie di intervento

Anche quando siamo interessati a ottenere una trasformazione di oggetti empirici, come lo spostamento di un tavolo o la costruzione di una casa (la trasformazione α nel diagramma sotto), operiamo spesso impiegando anche oggetti di informazione, dunque con una strategia di intervento strutturalmente più complessa, perché indiretta (β–γ–δ):



Naturalmente ci aspettiamo che la strategia indiretta a partire dalle stesse condizioni, $stato_1$, produca lo stesso risultato, $stato_2$, che si otterrebbe applicando la strategia diretta. D'altra parte, $info_2$ non ha, generalmente, una qualità migliore di $info_1$ in quanto strumento descrittivo su $stato_1$; si tratta del cosiddetto *principio GIGO -- garbage in, garbage out*:

se la qualità dell'informazione acquisita è bassa,
la decisione presa rischierà di essere a sua volta di bassa qualità.

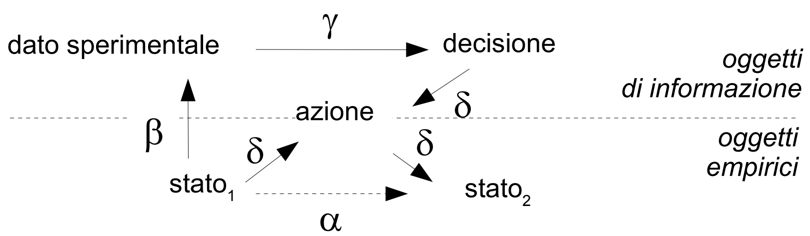
I dati ottenuti sperimentalmente sono dunque numeri caratterizzati da una "qualità".

(caratteristica che i numeri della matematica non hanno)

Ci sono degli esempi di, almeno apparente, violazione del principio GIGO? Per esempio, è una violazione il fatto che gli algoritmi di elaborazione delle immagini siano in grado di mettere a fuoco o aumentare il contrasto delle fotografie?

Condizioni di qualità nella strategia indiretta

Lo schema precedente può essere rifatto, più dettagliatamente, come segue:



Il fatto di ottenere effettivamente il risultato cercato, cioè $stato_2$, adottando la strategia indiretta dipende da varie condizioni:

- [δ] la conformità dell'azione alla decisione (è una condizione che può essere critica in molte situazioni organizzative – è un tipico problema "da manager" – ma di cui non ci interessiamo qui);
- [γ] la correttezza del modello che ha portato alla decisione (è una condizione relativa all'insieme delle conoscenze implicato – nel caso precedente del pianoforte è la geometria – ma di cui non ci interessiamo qui);
- [β] la qualità dei risultati delle misurazioni.

Questo è il problema qualificante a proposito dell'analisi di dati sperimentali

(in effetti è necessario porre, in generale, un'ulteriore condizione: poiché il momento in cui viene attuata l'azione (δ) è successivo al momento in cui si è misurato (β), occorre assicurarsi che nel frattempo $stato_1$ non si sia modificato in modo significativo – in caso contrario si starebbe prendendo una decisione su un sistema che è diverso da quello che si suppone sia... –: si tratta di un problema sottile, di cui pure comunque non ci occupiamo qui).

D'ora in poi ci interesseremo dunque di dati ottenuti mediante:

- *misurazione diretta* (β): il misurando è la proprietà acquisita da $stato_1$;
- *misurazione indiretta* (β–γ): il misurando è ottenuto elaborando proprietà acquisite da $stato_1$.

L'elaborazione dei dati sperimentali

Le operazioni di elaborazione (trasformazione γ) che si effettuano sui dati acquisiti "dal campo" (dunque mediante una trasformazione β) dovrebbero tener conto del principio GIGO. Dato lo schema:

i dati_in (generalmente numeri) ottenuti mediante misurazione mantengono un riferimento alla loro origine sperimentale che ne condiziona le modalità di espressione e di trattamento.
Per esempio: di un oggetto x di forma circolare è stato misurato il diametro d, ottenendo il valore $d(x)=1{,}234\ \mathrm{m}$; qual è il valore della circonferenza $c(x)$ di x?
Dalla geometria elementare sappiamo che $c(x)=\pi d(x)$. Facciamo eseguire il conto a un foglio elettronico, che per la funzione `pi()` potrebbe restituire per esempio il valore `3,1415926536`; quindi, in questo caso, `pi()*1,234 → 3,8767253345`. A conferma di ciò, per $d(x)=c(x)/\pi$, cioè invertendo l'operazione, otteniamo `1,2340000000`. Da un punto di vista puramente matematico l'operazione si dimostra dunque corretta, dato che evidentemente $1{,}234=1{,}2340000000$. Il fatto è però che il valore $d(x)=1{,}234\ \mathrm{m}$ era stato ottenuto come risultato di una misurazione, e quindi è un dato di origine sperimentale.

Che conseguenze ha il fatto che un numero sia in effetti un dato di origine sperimentale?

(per coloro a cui piacciono gli acronimi, per memorizzare: dato di origine sperimentale = DOS).

Qualità dei dati sperimentali

Intesi come dati sperimentali, $1{,}234\ \mathrm{m}$ e $1{,}2340000000\ \mathrm{m}$ non sono affatto equivalenti, come dimostra il fatto che un fisico obietterebbe che di nessun oggetto macroscopico si può misurare la lunghezza nell'ordine dei $10^{-10}\ \mathrm{m}$, considerando che questo è l'ordine delle dimensioni atomiche.
Dunque *i numeri "dei matematici" e i numeri "degli ingegneri" sono parzialmente diversi*. Ma in cosa consiste questa differenza?
A differenza dei numeri "dei matematici", i numeri "degli ingegneri" sono strumenti per descrivere entità empiriche, e quindi ci si deve porre al riguardo la domanda:

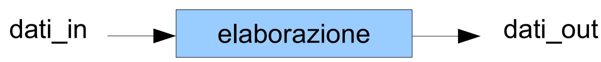
quanto bene i numeri descrivono l'oggetto in esame?

Per esempio, $1{,}2\ \mathrm{m}$ significa che l'informazione di cui si dispone non consente di dire nulla sulla lunghezza in cm del tavolo, mentre $1{,}20\ \mathrm{m}$ significa che si sa (o almeno che si sostiene di sapere) che il tavolo è lungo 1 metro, 2 decimetri e 0 centimetri.
Entra in gioco, dunque, un concetto di *qualità dei dati*, che in matematica è assente; i numeri "dei matematici" vanno adattati, e in particolare:

- se ho informazione sulla lunghezza in cm e invece scelgo di esprimere il dato in dm, *non commetto un errore*, ma solo esprimo l'informazione con una qualità minore di quella di cui dispongo (come quando si dichiara la propria età in anni invece che in giorni);
- se ho informazione sulla lunghezza in dm e invece scelgo di esprimere il dato in cm, *commetto un errore* (o quantomeno mi prendo un rischio), dato che esprimo l'informazione con una qualità maggiore di quella di cui dispongo: *come si può evitare di commettere questo errore?*

Ancora sulla qualità dei dati sperimentali

Per mettere in evidenza che il numero di cifre decimali con cui viene espresso un dato sperimentale è un indice di qualità dei dati, esso viene chiamato *numero di cifre significative* (ncs)
A questo proposito, il principio GIGO può essere riespresso così: in un processo di elaborazione che trasforma dati_in in dati_out:



il ncs di dati_out non dovrebbe essere maggiore del ncs di dati_in, dato che, in caso contrario, si "creerebbe informazione" durante l'elaborazione.
Tornando all'esempio precedente, il ncs della circonferenza $c(x)$ non dovrebbe essere maggiore del ncs del diametro $c(x)$. Nell'ipotesi che l'elaborazione non riduca la qualità dei dati, dunque, il valore da riportare

non è $c(x)=3{,}8767253345$ m ma $c(x)=3{,}876$ m . D'altra parte, considerando che la cifra successiva a quelle indicate, 7 , è maggiore di 5 , per arrotondamento all'intero più vicino si ottiene $c(x)=3{,}877$ m .
Un altro esempio: in un gruppo di 30 persone, 10 sono maggiorenni; si vuol sapere qual è la percentuale $m_{\%}$ di maggiorenni nel gruppo. La risposta è facile: $m_{\%}=100\times 10/30=33{,}33\ldots\%$. Con quante cifre decimali dovrebbe essere espressa questa percentuale?
Supponiamo che sia data la seguente regola: "un gruppo può entrare se almeno il 35% dei suoi componenti è maggiorenne". Il gruppo precedente può entrare? Dato che $33{,}33\ldots<35$, sembrerebbe di no, ma calcolando il 35% di 30 si ottiene $30\times 35/100=10{,}5$. Come dovrebbe essere interpretata, in questo caso, una "mezza persona"?
La scelta del corretto ncs con cui esprimere una percentuale è un problema molto frequente (e la cui soluzione è molto frequentemente sbagliata). In particolare, le percentuali riferite a insiemi di meno di 100 individui non dovrebbero avere decimali (per esempio, poiché 1 individuo su 50 è pari al 2% , ma 2 individui al 4% , in tal caso si potrebbe correttamente scrivere $2\pm 1\%$; d'altra parte, 1 individuo su 51 è pari al $1{,}96078\ldots\%$, che però ancora corrisponde in effetti circa al $2\pm 1\%$).

La scrittura di dati sperimentali

Poiché i dati di origine sperimentale sono generalmente numeri con unità di misura, nella loro scrittura occorre rispettare alcune convenzioni notazionali, stabilite nel contesto del Sistema Internazionale delle unità (*International System of Units*, SI). I simboli delle unità nel SI sono scritti come segue:

- in generale, i simboli delle unità sono scritti in lettere minuscole, ma, se il nome dell'unità è derivato dal nome proprio di una persona, la prima lettera del simbolo è maiuscola (dunque per esempio "m" per metro ma "W" per watt). Quando il nome dell'unità è scritto per intero, è sempre scritto in minuscolo, salvo quando è il primo termine di una frase o è un nome come "gradi Celsius";
- tra il valore numerico è il simbolo dell'unità si inserisce uno spazio;
- i simboli delle unità non si modificano al plurale;
- i simboli delle unità non sono seguiti dal punto salvo quando sono in fondo a una frase.

I prefissi, da adottare anteponendoli ai simboli delle unità, sono:

fattore	*nome*	*simbolo*	*fattore*	*nome*	*simbolo*
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deca	da	10^{-24}	yocto	y

Qualche nota.

- Tra le unità di base del Sistema Internazionale l'unità di massa è l'unica il cui nome e simbolo, per ragioni storiche, contengono un prefisso, e dunque è "kg" invece di "g".
- Il simbolo del prefisso per il fattore 10^{3} è "k", scritto minuscolo, "kilo" per esteso; si usa invece il simbolo "K", scritto maiuscolo, "kibi" per esteso, per indicare il fattore $1024=21^{0}$, impiegato soprattutto in informatica. I prefissi per i fattori successivi non sono tradizionalmente distinti, e perciò per esempio il prefisso "M" (per "mega") è ambiguo, dato che sta sia per il fattore 10^{6} in accordo al Sistema Internazionale, sia per il fattore $1048576=2^{20}$ nelle consuetudini dell'informatica. Per questa ragione, per le potenze di 2 sono stati introdotti nuovi nomi e prefissi, come segue:

fattore	*nome*	*simbolo*
$(2^{10})^{8}$	yobi	Yi
$(2^{10})^{7}$	zebi	Zi
$(2^{10})^{6}$	exbi	Ei

$(2^{10})^5$	pebi	Pi
$(2^{10})^4$	tebi	Ti
$(2^{10})^3$	gibi	Gi
$(2^{10})^2$	mebi	Mi
$(2^{10})^1$	kibi	Ki

Si tratta, peraltro, di una convenzione ancora poco diffusa.

- Confermando che il separatore decimale standard è la virgola, nel 1997 il Comitato Internazionale dei Pesi e delle Misure (CIPM) ha però deciso che nei testi in lingua inglese può essere usato come separatore decimale il punto. Dunque in Italia come separatore decimale si dovrebbe usare la virgola, salvo forse in contesti particolari come i documenti di informatica, in cui il riferimento alla lingua inglese è sistematico. D'altra parte, la nota anglofilia degli italiani fa sì che spesso questa regola non venga rispettata...

Numero di cifre significative

Ancora a partire dallo schema:

dati_in → elaborazione → dati_out

il ncs del risultato di un'elaborazione, dati_out, dipende dal ncs dei dati di partenza, dati_in.
Per stabilire il ncs con cui esprimere il risultato di una misurazione:

- con uno strumento a lettura digitale, dovrebbe essere il numero di cifre indicate;
- con uno strumento a lettura analogica, dipende dalla scala indicata e dall'abilità di colui che effettua la misurazione.

Per stabilire il ncs con cui è espresso un numero:

- il ncs non dipende dall'unità di misura scelta (p.es. $1{,}23$ m e 123 cm hanno lo stesso ncs);
- le cifre diverse da zero sono sempre significative (p.es. 12 ha due cifre significative, e $12{,}3$ ha tre cifre significative);
- a proposito dello zero:
  - zeri tra altre cifre sono sempre significativi (p.es. 1002 ha quattro cifre significative);
  - zeri iniziali non sono mai significativi (p.es. $0{,}012$ ha due cifre significative);
  - zeri finali indicati nella parte decimale sono significativi (p.es. $1{,}20$ ha tre cifre significative) (e questa è la ragione per cui in ingegneria per esempio $1{,}2$ e $1{,}20$ non sono equivalenti: il primo ha due cifre significative, il secondo si suppone che ne abbia tre);
  - nel caso di zeri finali indicati nella parte intera il ncs è ambiguo (p.es. 1200 ha almeno due cifre significative, ma potrebbero essere tre o quattro).

Per risolvere questa ambiguità vedremo che è appropriato scrivere i numeri in notazione scientifica.

Arrotondamento

Può essere dunque necessario eliminare le cifre non significative di un numero, mediante un'operazione chiamata di arrotondamento (*round off*). La procedura di arrotondamento è la seguente:

- per il numero in esame, si stabilisce il ncs; siano x l'ultima cifra a destra da mantenere e y la cifra successiva a x, cioè la prima da eliminare (p.es. se il numero è $23{,}4567$ e il ncs è 4, allora $x=5$ e $y=6$);
- si eliminano le cifre a destra di x;
- se $y<5$, la procedura termina (p.es. se il numero è $23{,}4567$ e il ncs è 2, allora il risultato dell'arrotondamento è 23);
- altrimenti se $y>5$, si sostituisce $x+1$ a x (p.es. se il numero è $23{,}4567$ e il ncs è 5, allora il risultato dell'arrotondamento è $23{,}457$);
- altrimenti se $y=5$, la procedura è convenzionale, per esempio come segue:
  - se una o più cifre successive a y sono diverse da 0, si sostituisce $x+1$ a x (p.es. se il numero è $23{,}4501$ e il ncs è 3, allora il risultato dell'arrotondamento è $23{,}5$);
  - altrimenti se successivamente a y non ci sono cifre o le cifre sono tutte uguali a 0:
    - se x è un numero pari, la procedura termina (p.es. se il numero è $23{,}450$ e il ncs è 3, allora il risultato dell'arrotondamento è $23{,}4$);
    - altrimenti se x è un numero dispari, si sostituisce $x+1$ a x (p.es. se il numero è $12{,}350$ e il ncs è 3, allora il risultato dell'arrotondamento è $12{,}4$).

Notazione scientifica normalizzata

Per evitare l'ambiguità nel caso di zeri finali nella parte intera di un numero, è opportuno adottare la *notazione scientifica* (per cui, p.es., 1200 potrebbe diventare $1{,}2\times10^3=1{,}2\mathrm{E}3$, o $1{,}20\times10^3=1{,}20\mathrm{E}3$, o $1{,}200\times10^3=1{,}200\mathrm{E}3$, rispettivamente con ncs pari a 2, 3 e 4).

Si chiama in particolare *notazione scientifica normalizzata* la scrittura $a\times10^b$ con la condizione che $1\leqslant|a|<10$.

Sia x un numero scritto in notazione scientifica normalizzata con un numero di cifre decimali diverso dal (e in particolare maggiore del) ncs.

Problema: possiamo definire una formula per riscrivere x con il corretto ncs?

Risposta: $\dfrac{\mathrm{int}\left(10^{\mathrm{ncs}-1}x+0{,}5\right)}{10^{\mathrm{ncs}-1}}$

(avendo assunto di poter usare la funzione $\mathrm{int}()$, che restituisce la parte intera del suo argomento, e quindi che $\mathrm{int}(x+0{,}5)$ – lo si verifichi! – arrotonda all'intero più vicino).

Ancora sul numero di cifre significative

Il ncs del risultato di un'elaborazione, dati_out, in funzione del ncs dei dati di partenza, dati_in, si ottiene come caso particolare della cosiddetta "legge di propagazione dell'incertezza", che introdurremo nella parte finale di questo stesso corso. Al proposito si possono applicare alcune regole empiriche:

- nel caso di addizioni e sottrazioni, il numero di cifre decimali del risultato è uguale al minore tra i numeri di cifre decimali degli operandi, naturalmente espressi nella stessa unità di misura (p.es. $0{,}012+12{,}34=12{,}35$); nell'ipotesi che il numero di cifre decimali sia un indicatore della "precisione" di un numero, questa regola stabilisce dunque che il risultato di un'addizione o di una sottrazione non può essere più preciso del meno preciso degli operandi;
- nel caso di moltiplicazioni e divisioni, il ncs del risultato è uguale al minore tra i ncs degli operandi (p.es. il risultato di $0{,}00120\times12{,}34$ dovrebbe essere espresso con tre cifre significative, dunque come $0{,}148$) (p.es. il risultato di $3{,}0\times400{,}0$ dovrebbe essere espresso con due cifre significative; dato però che la notazione 1200 è ambigua, è opportuno passare alla notazione esponenziale, $1{,}2\times10^3$); operandi di moltiplicazioni e divisioni che siano numeri interi si comportano come se avessero infinite cifre significative (p.es. $1{,}222\times2=2{,}444$, mentre dunque $1{,}222\times2{,}0=2{,}4$);
- nel caso di funzioni a uno o più argomenti, il ncs del risultato è uguale al minore tra i ncs degli argomenti (p.es. il risultato di $\sin(0{,}56)$ dovrebbe essere espresso con due cifre significative, dunque come $0{,}53$).

Un esempio di applicazione dei criteri sul ncs: quanto fa $1\ \mathrm{m}+1\ \mathrm{cm}$?

La risposta è almeno in parte ambigua, perché non è chiaro se $1\ \mathrm{m}$ possa essere interpretato come $100\ \mathrm{cm}$ oppure proprio solo come $1\ \mathrm{m}$; nel primo caso l'operazione è $100+1\ \mathrm{cm}$ e quindi la risposta è $101\ \mathrm{cm}$, nel secondo caso l'operazione è $1+0{,}01\ \mathrm{m}$ e quindi la risposta è $1\ \mathrm{m}$.

Elaborazione dei dati sperimentali: sintesi

Le regole operative fondamentali nella scelta del ncs sono le seguenti:

- effettuando elaborazioni in due o più passi, è opportuno mantenere nei risultati intermedi almeno una cifra in più del ncs dei dati di partenza, per ridurre gli effetti dei cosiddetti "errori di arrotondamento" (*round-off error*);
- in ogni caso, nei passi intermedi di un'elaborazione a più passi non bisogna mai arrotondare a un numero di cifre minore del ncs (si perderebbe informazione...);
- *nella scrittura del risultato di un'elaborazione non si dovrebbe mai riportare un numero di cifre maggiore del ncs*, e ciò perché si introdurrebbe informazione non acquisita empiricamente.

Ordini di grandezza

Nel caso estremo di limitata precisione dei dati sperimentali, è sufficiente effettuare elaborazioni solo per *ordini di grandezza*, dunque solo con stime approssimate i cui risultati dovrebbero essere espressi con una o al massimo due cifre significative, e comunque in notazione scientifica:

- quanto pesa la terra (ipotizzando una densità media di $5\ \mathrm{kg/dm^3}$ e un raggio di $6000\ \mathrm{km}$)?
- quanti battiti ha fatto il nostro cuore da quando siamo nati (ipotizzando un battito al secondo)?
- quanto è distante (in metri) la terra dal sole (distante circa 8 minuti luce)?

- quanto è distante (in metri) la terra dalla stella (diversa dal sole) più vicina (distante circa 4 anni luce)?
- quanta energia si potrebbe liberare da $1\ \mathrm{kg}$ di massa (confronta con il TNT: circa $10^7\ \mathrm{J}$)?
- ...

Analisi dimensionale

Premesse:

- la stessa grandezza può essere misurata con unità diverse (p.es. la lunghezza può essere misurata in metri, in centimetri, in pollici, ...);
- la stessa grandezza può essere interpretata e chiamata in modi diversi (p.es. sono lunghezze anche le distanze, i diametri, le lunghezze d'onda, …).

Ciò che in questo senso hanno in comune lunghezza_in_metri, diametro_in_pollici, distanza_in_miglia, ... si chiama la loro *dimensione*.

Molte grandezze fisiche sono esprimibili in funzione di cinque dimensioni di base, identificate dal SI: massa (**M**), lunghezza (**L**), tempo (**T**), intensità di corrente elettrica (**I**) e temperatura (**θ**).

Data la grandezza x, si indica con $[x]$ la sua dimensione; dunque per esempio $[\text{diametro}]=\mathbf{L}$ e $[\text{velocità}]=[\text{spazio}]/[\text{tempo}]=\mathbf{LT}^{-1}$.

Equazioni che coinvolgono grandezze con una dimensione devono rispettare dei *vincoli dimensionali*, e in particolare:

- il termine a sinistra e quello a destra del segno di uguale devono avere la stessa dimensione;
- si possono sommare e sottrarre solo grandezze con la stessa dimensione.

Nota: varie grandezze sono *adimensionali* (cioè sono “numeri puri”); tra queste: i valori di funzioni trigonometriche, esponenziali, logaritmiche, ..., il risultato di conteggi, oltre che, evidentemente, costanti numeriche come e e π. Gli angoli sono un caso particolare: sono grandezze adimensionali, ma si misurano comunque in radianti o in gradi.

Prendiamo come esempio la ben nota legge di gravitazione universale:

$$F=G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Quali sono le dimensioni della costante G ? Il fatto che tale costante non sia adimensionale fa sì che essa abbia un doppio ruolo: non solo numerico, ma anche, appunto, dimensionale. Svolgendo:

$$[G]=[F]\frac{[r]^2}{[m_1][m_2]}$$

da cui $[G]=[F]\mathbf{L}^2\mathbf{M}^{-2}$; d'altra parte la forza è definita come massa per accelerazione, e quindi $[F]=\mathbf{MLT}^{-2}$; ne segue, infine, che $[G]=\mathbf{L}^3\mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}^{-2}$.

Si potrebbe riscrivere la legge di gravitazione universale nella forma:

$$F=\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dunque? Naturalmente sì, ma occorrerebbe ridefinire la dimensione della forza, come $[F]=\mathbf{M}^2\mathbf{L}^{-2}$, e poiché la forza compare in molte altre leggi fisiche, le si dovrebbe modificare in conseguenza.

Nota: l'argomento di una funzione trigonometrica è un angolo, e quindi deve essere adimensionale; per esempio l'espressione $f(t)=\sin(2\pi t)$ è dimensionalmente errata; la scrittura corretta è invece $f(t)=\sin(2\pi\nu t)$, essendo $\nu=1\,Hz$ la frequenza della sinusoide (e infatti $[n]=\mathbf{T}^{-1}$), che nella versione precedente rimaneva implicita.

Nota: l'argomento di un esponenziale è un logaritmo, e quindi deve essere adimensionale; per esempio nell'espressione $f(t)=\mathrm{e}^{kt}$ il termine k deve avere la dimensione $\mathbf{T}^{-1}$).

Esempio: verificare che la nota equazione $E=mc^2$ è dimensionalmente corretta.